1 G1: $(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$. ~~want~~ $\forall a,b,c \in R^*$ want a,b,c ook in R. ✓

what do you need to show?

G2: ~~$(a \cdot b) = b \cdot a$~~ $b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1}(a \cdot b) \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$? $a \in R^* \Leftrightarrow a^{-1}$ bestaat.

R^* not commutative in general

G3: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ $\forall a,b,c \in R^*$? want a,b,c ook ~~te~~ in R.

1/3

2.a) R1: R^V is een ~~gr~~ abelse groep onder optelling:

G1 $(f+g)+h = f+g+h = f+(g+h)$

G2 $(f+g)(v) = f(v)+g(v) = g(v)+f(v) = (g+f)(v)$

G3: $(f+0)(v) = f(v)+0(v) = f(v) = (0+f)(v)$

R2: $(fg)h(v) = f(v) \cdot g(v)\, h(v) = f(gh)(v)$

R3: $f(g+h)(v) = f(g(v)+h(v)) = (fg)(v) + (fh)(v)$

$(f+g)(v)h(v) = (f(v)+g(v))h(v) = f(v)h(v) + g(v)h(v) = (fh)(v) + (gh)(v)$

R4 $(f \cdot 1)(v) = f(v) \cdot 1(v) = f(v) \cdot 1 = f(v) = 1 \cdot f(v) = 1(v) \cdot f(v) = (1 \cdot f)(v)$

how are "0" and "1" defined as functions $V \to R$?

2.5/3

b) Element f is een nuldeler als $f \neq 0$ $\exists g$ z.d.d. $f \cdot g = 0$, $g \neq 0$
Voor $n=2$ beschouw de functies $f(v_1, v_2) = (0,1)$ en $g(v_1, v_2) = (1,0) \Rightarrow$
$f \neq 0 \neq g$ en $f \cdot g = 0 \Rightarrow f, g$ nuldelers. Voor $n > 2$ gebeurt iets soortgelijks.
Bekijk $f_i(\ldots, v_i, \ldots) = (\ldots, 0, \ldots)$ die v_i op 0 afbeeldt. $\prod_{i=0}^{n} f_i = 0$
en $f_i \neq 0$ $\forall i \Rightarrow f_i$ is nuldeler.

2/2

(c) $V = [0,1]$ $R = \mathbb{R}$ $C([0,1]) = \{ f : [0,1] : f \text{ is continu} \}$

Deelring R' voldoet aan

D1) $0 \in R'$

D2) $a - b \in R'$ $\forall a,b \in R'$

D3) $ab \in R'$ $\forall a,b \in R'$

D1. De nulfunctie is continu ~~en~~ op het interval $[0,1]$ dus $0 \in C([0,1])$ ✓
D2 Het verschil van twee continue functies is weer continu. ✓
D3 Het product van twee continue functies is weer continue ✓

Bekijk de functies $f(x) = \begin{cases} 0 & v < \frac{1}{2} \\ v - \frac{1}{2} & v \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ en $g(v) = \begin{cases} -v + \frac{1}{2} & v < \frac{1}{2} \\ 0 & v \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(v) \neq 0 \neq g(v)$ $f(v) g(v) = 0 \Rightarrow f$ en g nuldelers dus $C([0,1])$ heeft nuldelers.

3/3

7.5/18

3 (a) Een ideaal I van een ring R is een deelverzameling ~~zodat~~ voldoend aan.

I1) Ondergroep:
H1) $0 \in I$
H2) $a - b \in I$ $\forall a,b \in I$

I2 ~~als~~ $\forall a \in I$ en $r \in R$ geldt $ar \in I$ en $ra \in I$

2/2

b) $I \cap R^* \neq \emptyset \Rightarrow I$ bevat een eenheid van R. $\Rightarrow a \cdot a^{-1} = 1 \in I$ (I2 met $a = a$ en $r = a^{-1}$)
$\forall r \in R$ zit nu $1 \cdot r \in I$ (I2 met $a = 1$) $\Rightarrow I = R$ $\square$

3/3

c) ~~Een delingsring~~ In een delingsring is elk element $\neq 0$ een eenheid. Als I geen element ongelijk aan nul bevat dan $I = \{0\}$. Bevat I een element ongelijk aan nul dan $I \cap R^* \neq \emptyset$ en volgens (b) geldt dan $I = R$ $\square$

3/3

8/8

4 (a) $\Phi_i : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$.

$\ker(\Phi_i) = (g)$ g: polynoom met een zo klein mogelijke graad, $g \neq 0$

~~$gr(g) = 2o$~~ Van alle constante polynomen beeldt alleen $g=0$ f op nul af. $i \notin \mathbb{R}$ dus er zit geen g met $gr(g) = 1$ in $\ker(\Phi_i)$.

$i^2 = -1 \Rightarrow X^2+1 \big|_{X=i} = 0 \Rightarrow g = X^2+1 \in \ker(\Phi_i)$ en $gr(g) = 2$.

We hebben nu dus een g met zo klein mogelijke graad $\Rightarrow \ker(\Phi_i) = (X^2+1)$ $\square$

3/3

(b) Volgens de eerste isomorfiestelling is $R_1/\ker(f) \cong R_2$ voor zekere $f: R_1 \to R_2$ als f surjectief is. Ieder element $z = \cancel{a+bi \in} \mathbb{C}$ is te schrijven als $a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$

$a+bi = f(i)$ voor $a+bX$: $a,b \in \mathbb{R}$. Omdat al deze polynomen $\in \mathbb{R}[X]$ ~~zijn~~ geldt

$\mathbb{C} \subset \text{beeld}(f) \Rightarrow f$ is surjectief $\Rightarrow \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$

3/3

6/6

5. Een ideaal M van een ring R is maximaal als

M1) $M \neq R$

M2) ~~Voor~~ Voor een ideaal J met $M \subset J \subset R$ geldt: $M = J$ of $J = R$

Een ideaal I ~~van~~ van een ring R is priem als

I1) $I \neq R$

I2) $\forall (a,b) \in I$ geldt $a \in R^*$ of $b \in R^*$.

$a \in I$ $b \in I$

1/2

(b) $n\mathbb{Z}$ is maximaal $\iff$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is een lichaam $\iff$ n is priem   3/3

(c) $M \subset R$ is maximaal $\iff$ R/M is een lichaam $\Rightarrow$ R/M is een domein $\iff$ M is priem.   3/3

7/8

6. (a) $R = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ oneven} \}$

voor een eenheid $r \in R$ geldt $r \cdot r^{-1} = 1$ $r = \frac{a}{b} \Rightarrow r^{-1} = \frac{b}{a}$. $r^{-1} \in R$ ⟺ a oneven.

$\Rightarrow R^* = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\ a, b \text{ oneven} \}$ 2/2

(b) $u \in R^* \Rightarrow u = \frac{a}{b}$. a, b oneven $x = 2^k \cdot u = 2^k \cdot \frac{a}{b} = \frac{2^k \cdot a}{b}$ a, b oneven.

Ieder oneven getal a kan uniek geschreven worden als product van een aantal priemgetallen groter dan 2. Door met 2^k te vermenigvuldigen kan dus elk getal uit $\mathbb{Z}$ geconstrueerd worden en elke $x \in R$ kan dus geschreven worden als $2^k \cdot u$ met $u \in R^*$ 2/3

slightly vague

(c) Allereerst dient te worden opgemerkt dat $2 \neq$ geen eenheid ($a \neq 0$). Een element is irreducibel als geldt

$R^* \not\ni a = b \cdot c \Rightarrow b \in R^*$ of $c \in R^*$. $2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} \Rightarrow 2$ is irreducibel. ? You need to show that whenever $ab = 2$ then $a \in R^*$ or $b \in R^*$

~~Volgens (b) is ieder ander element te schrijven als $2 \cdot 2^k u$~~

Ieder element niet uit R^* heeft dus de vorm $\frac{a}{b}$. a even b oneven $\Rightarrow \frac{2k}{2n-1}$ $k, n \in \mathbb{Z}$

Als k oneven dan $\frac{k}{2n-1} \in R^*$ en $\frac{2k}{2n-1} = 2$ (op eenheden na). Ieder element ongelijk aan 2 heeft dus de vorm $\frac{2k}{2n-1}$ $n, k \in \mathbb{Z}$, k even $\Rightarrow \frac{2k}{2n-1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot m}{2n-1}$ $m, n \in \mathbb{Z}$. Al deze elementen zijn nu echter te schrijven als $2 \cdot 2 \cdot u$ $u \in R^*$ en zijn dus reducibel. ✓ □

2R is geen priemideaal want ~~...~~ hebben $2R = \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}$ a even b oneven$\}$

2R is a prime ideal

$\Rightarrow 1 \notin 2R \Rightarrow 2R$ is geen ideaal laat staan een priemideaal.   1.5/3

5.5/8

(a) $m,n \in \ker(f) \Rightarrow f(m) = f(n) = 0 \Rightarrow$ ~~f(m) - f(n)~~ $f(m-n) = f(m) - f(n) = 0$
$\Rightarrow m-n \in \ker(f)$ ✓
$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n) = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow m \cdot n \in \ker(f)$.

$n \in \ker(f) \quad m \in M \Rightarrow f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m) = 0 \cdot f(m) = 0 = f(m) \cdot 0 = f(m) \cdot f(n) = f(mn)$

De nulafbeelding (~~f(m) = 0~~) ($f: m \mapsto 0$) zit uiteraard ook in $\ker(f)$.

~~(b)~~ $m,n \in im(f) \Rightarrow f(m) \in N \quad f(n) \in N \quad N$ is een moduul $\Rightarrow f(m) - f(n) \in N \Rightarrow$
$f(m-n) \in N \Rightarrow$
$m-n \in im(f)$

$im(f) = \{f(m) :$ ~~f(m)~~ $m \in M\}$

$m \in im(f), n \in N \Rightarrow f(m) \in N \Rightarrow n \cdot f(m) \in N \Rightarrow$ ~~f(n·m) ∈ N~~ $f(n) \cdot f(m) \in N$

~~(b)~~ $0 \in im(f)$ want M heeft een nul en $f(0) = 0$ ✓

~~(b)~~ $f(m), f(n) \in im(f) \Rightarrow f(m) - f(n) \in im(f) \Rightarrow f(m-n) \in im(f)$ ✓

$m \in im(f) \quad n \in N$

1.5/3

(b) $im(f) = \{f(m) : m \in M\}$ what do you need to show?
Neem $m,n \in M \Rightarrow m-n \in M$ (M moduul) $\Rightarrow f(m-n) \in im(f)$
Neem $m \in M \Rightarrow f(m) \in im(f) \subset N \Rightarrow$ not quite
~~0 = f(0)~~ $0 \in M$ (M moduul) $\Rightarrow f(0) = 0 \in im(f)$

1/3

2.5/6

1	2	3	4	5	6	7	8	total	
1	7.5	8	6	7	5.5	4.5	2.5 + 6	48	≃ 80%

mark: 8

13/11/08

H. Dwell

$(mn)p = m(np)$

$(m+n)+p = m+(n+p)$

7 (a) RM1 $\cancel{(a+b)+c = (a+(b+c))}$

RM2 $(a+b)m = am+bm$

$a(m+n) = am+an$

RM3 $1\cdot m = m\cdot 1 = m$

$\forall m,n,p \in M$ en $a,b \in R$

Voor $M=R$ is dit triviaal want R is een ring

Voor $M = R/I$

$(\bar{m}+\bar{n})+\bar{p} =$

M1 $(m+I+n+I)+p+I = m+I+(n+I+p+I) = \bar{m}+(\bar{n}+\bar{p})$

M2 $(a+b)\bar{m} = (a+b)(m+I) = am+bm+aI+bI = am+bm+I = \overline{am+bm} = a\bar{m}+b\bar{m}$

$a(\bar{m}+\bar{n}) = a(m+I+n+I) = am+an+aI+aI = am+an+I = \overline{am+an} = a\bar{m}+a\bar{n}$

M3 $1\cdot\bar{m} = 1\cdot(m+I) = m+1\cdot I = m+I = \bar{m}$ $\square$

3/4

(b) ~~f(a+b) = f(a)~~ ϕ is een R-moduulhomomorfisme als

$\varphi(m+n) = \varphi(m)+\varphi(n)$

$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ $\varphi(mn) = m\varphi(n)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(m+n) = \overline{m+n} = \bar{m}+\bar{n} = \varphi(m)+\varphi(n)$

$\varphi(mn) = \overline{mn} = \bar{m}\bar{n} = \varphi(m)\varphi(n)$

$\varphi(0) = \bar{0} = 0 \in R/I$ $\square$

1.5/3

4.5/7

8(a) ~~Sub~~ Deel moduul ? voldoet aan

DM1) $m-n \in D$ $\forall m,n \in D$

DM2) ~~$mn \in D$ $\forall m,n \in D$~~ $m \in D$ $r \in R$ ~~$n \in M$~~ $\Rightarrow m\cdot r \in D$ ~~$(n\cdot m \in D)$~~

DM3) $0 \in D$